ESPAÇOS DE HILBERT

Jonas Barros Lima de Medeiros [1], **Rodrigo Cohen Mota Nemer** [2]

RESUMO

Este projeto de Iniciação Científica exibe um estudo estruturado em conteúdos das disciplinas de Álgebra Linear I e II, Análise Real e Análise Funcional, sendo divido em três etapas: a primeira etapa trata-se do estudo de conceitos introdutórios, em que é trabalhada a base matemática do discente, relembrando e revisando tópicos relevantes, necessários para o bom desenvolvimento do tema principal; a segunda etapa diz respeito ao estudo de tópicos iniciais de Análise Funcional, seguindo o clássico trabalho de H. Brezis, "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations"; por fim, o estudo do tema principal, quando são exploradas as propriedades dos Espaços de Hilbert. Tendo isso em vista, o presente projeto tem como objetivo trabalhar a teoria geral de Espaços de Hilbert, com foco no Teorema de Lax-Milgram, o qual pode ser usado para garantir existência e unicidade de equações diferenciais parciais como

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \ \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ \qquad\quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

sob algumas hipóteses técnicas. Além disso, fazer com que o discente enriqueça e aumente seus conhecimentos em Matemática, para que futuramente possa ter um satisfatório desempenho em cursos de pós-graduação na área em que estudamos.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert, Análise Funcional, Álgebra Linear, Análise Real.

[1] Aluno do curso Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: jonaslima1101@outlook.com

[2] Doutor, Professor efetivo, Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: rodrigocmnemer@mat.ufcg.edu.br

ESPAÇOS DE HILBERT

ABSTRACT

This Scientific Initiation project is a three step program in which various topics are studied, as Linear Algebra, Real Analysis and Functional Analysis. At first, Linear Algebra and Real Analysis theory are revised; after that, introductory topics of Functional Analisys are explored, following the path presented by classic H. Brezis' book, "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations"; finally, properties of Hilbert Spaces are examined. With this in mind, this project aims to study general properties of Hilbert Spaces, having Lax-Milgram's Theorem as final goals, which can be use to estabilish existence and unicity of solution for some partial differential equations such as

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

under some technical hypothesis. As a consequence, general mathematical knowledge of our student will be enriched and enhanced.

Keywords: Functional Analysis, Hilbert Spaces, Linear Algebra, Real Analysis.

INTRODUÇÃO

O estudo de Álgebra Linear na graduação tem como um dos objetivos dar base para os discentes trabalharem com Cálculo de Funções de Várias Variáveis e Equações Diferênciais Ordinárias. Este segundo tema é empregado no estudo de fenômenos físicos simples, como problemas de misturas, sistema massa-mola, propagação de calor em uma dimensão, etc. Para problemas físicos mais complexos, faz-se necessário o uso de ferramentas matemáticas mais avançadas. Daí, destacamos o estudo de Análise Funcional, tema tanto versátil quanto poderoso para estudar propagação de ondas e calor em dimensões mais altas e membranas. Além disso, a Análise Funcional é, sob certo ponto de vista, a escolha mais natural quando o desejo é prosseguir estudos iniciados com Álgebra Linear. Além deste tema, para chegar aos conteúdos mais avançados de Análise Funcional, o discente também precisa ter uma base sólida na disciplina de Análise Real, que é o ponto de partida para o entendimento de conceitos que são utilizados para compor o estudo principal da Iniciação Científica.

Com relação à Análise Funcional, o tema é vasto e profundo. Sendo assim, o foco é o

Teorema de Lax-Milgram: Seja $a(.,.)$ uma forma bilinear contínua e coerciva em um espaço de Hilbert H. Dado $\phi \in H^*$, existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \phi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Mais ainda, se a é simétrica, então u é caracterizada por

$$u \in H \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle \right\}.$$

Este resultado pode ser aplicado para garantir existência e unicidade de solução de problemas de Laplace com condição de Dirichlet homogênea

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado e $f \in H$, para um espaço de Hilbert H adequado.

Inicialmente, a escolha do tema foi motivada a partir de um eminente interesse do orientando em estudar temas relacionados à Álgebra Linear. Ainda mais, é de extrema vontade do aluno, depois da graduação, continuar os estudos em temas matemáticos mais avançados. Sendo assim, aproveitamos esta oportunidade para fazer uma ponte que relaciona alguns tópicos de Álgebra Linear em dimensão finita com conteúdos das disciplinas voltadas a uma pós-graduação.

MATERIAIS E MÉTODOS (OU METODOLOGIA)

Devido o atual cenário (Pandemia covid-19), os encontros para o andamento do projeto são realizados atráves da plataforma digital Google Meet. As reuniões ocorrem semanalmente, com duração de 2h, nas quais são estudados os conteúdos progamados no planjamento que foi estabelecido previamente pelo o orientador e discente.

Sobre as apresentações para o acontecimento da Iniciação Científica, objetivando o aperfeiçoamento da escrita matemática, do uso português formal do aluno, as exposições de conteúdos relacionados à Matemática e a digitação de conteúdos acadêmicos, foi acordado entre orientador e orientando que as exposições serão realizadas através de um compilado feito pelo software LaTeX. O LaTeXé um programa com alta qualidade tipográfica voltado à digitação de textos científicos, em particular, um dos principais meios de escrita de textos matemáticos.

Tendo como objetivo proporcionar um melhor rendimento e fixação de conteúdos por parte do discente, as exposições semanais são acompanhadas de discussões e apontamentos de problemas propostos. Tais exercícios são escolhidos diligentemente pelo orientador, deixando, assim, os temas estudados mais interessantes e didáticos. Sempre que oportuno, o orientador e o discente reservam algumas reuniões para a resolução de exercícios, focando na revisão de tópicos estudados anteriormente e, mais precisamente, nos pontos que serão fundamentais para o estudo da teoria geral dos Espaços de Hilbert.

Vale ressaltar que a bibliografia, citada no fim deste material, foi escolhida de modo a construir sobre bases sólidas o percurso até o nosso objetivo.

DESENVOLVIMENTO

Inicialmente, para a constância do projeto e tendo com objetivo fortalecer a base matemática do aluno, tendo em vista o tema principal da Iniciação Científica, o estudo do presente projeto foi desenvolvido a partir de tópicos relacionados à Álgebra Linear em dimensão finita e Análise Real. Sobre o que diz respeito à disciplina de Álgebra Linear, foi estudado e apresentado pelo orientando os seguintes tópicos:

1. Aplicações Lineares;
2. Aplicaões Lineares e Matrizes;
3. Produto Escalares e Ortogonalidade;
4. Permutações;
5. Operadores Simétricos, Hermitianos e Unitários;
6. Autovetores e AutoValores;

7. Diagonalização de Aplicações Unitárias;
8. Espaços Vetoriais Complexos.

Tais assuntos foram desenvolvidos a partir das referências (LANG, 2003) e (LIMA, 2003).

Já na parte de Análise Real, o discente estudou e expôs os seguintes tópicos:

1. Sequências de Números Reais;
2. Séries de Números Reais;
3. Topologia da Reta;
4. Limites de Funções;
5. Funções Contínuas.

Estes conteúdos foram desenvolvidos a partir das referências (LIMA, 1976) e (ÁVILA, 2001).

A segunda etapa do projeto, a qual estamos desenvolvendo no presente momento, está diretamente ligada ao estudo dos conteúdos iniciais de Análise Funcional, que irão compor o tema final da Iniciação Científica. Para esta etapa são utilizadas as referências (BREZIS, 2011), (KREYZIG, 1978), e estamos estudando os seguintes tópicos:

1. The Analytic Form of the Hahn-Banach Theorem: Extension of Linear Functionals;
2. The Bidual $E^{\star\star}$. Orthogonality Relations;
3. Weak topologies, Reflexive Spaces, Separable Spaces.

Para alcançar a terceira e última etapa, o discente irá estudar as referências (KREYZIG, 1978) e (BREZIS, 2011), mais precisamente, o tema: Espaços de Hilbert, tendo como obetivo aplicar o Teorema de Lax-Migram em situações diversas.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como foi citado anteriormente no desenvolvimento, para compor este projeto, o orientando estudou e expôs diversos conteúdos relacionados às disciplinas também mencionadas anteriormente. Logo abaixo, ressaltamos os principais resultados alcançados pelo discente, sobre o que diz respeito ao estudo de Álgebra Linear e Análise Real.

- **(Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem)** Sejam V e W dois espaços vetoriais e $L : V \to W$ uma aplicação linear. Tem-se:

$$dim(V) = dim[N(L)] + dim[Im(L)].$$

- **(Teorema 4.1, (LANG, 2003))** Dada a aplicação bilinear $g : \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, existe uma única matriz A tal que $g = g_A$, onde

$$g(X, Y) = X^T AY.$$

- **(Teorema 6.2, (LANG, 2003))** Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, munido de um produto escalar não degenerado. Então a aplicação $v \mapsto L_v$ é um isomorfismo entre V é o espaço dual V^*.

  (Teorema de Sylvester) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, munido de um produto escalar. Existe um inteiro $r \geq 0$ verificando a seguinte propriedade: se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V, então existem precisamente r inteiros i tais que $\langle v_i, v_i \rangle > 0$.

- **(Teorema 11.1, (LIMA, 2003))** Seja E um espaço vetorial n-dimensional, munido de um produto interno. A correspondência $\varphi : E \to E$ que associa a cada $v \in E$ o funcional linear $\varphi(v) = v$, tal que $v^*(w) = \langle w, v \rangle$ para todo $w \in E$ é um isomorfismo.

- **(Teorema 11.4, (LIMA, 2003))** Dada a transformação linear $A : E \to F$, entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^*) &= Im(A)^\perp \\ Im(A^*) &= \mathcal{N}(A)^\perp \\ \mathcal{N}(A) &= Im(A^*)^\perp \\ Im(A) &= \mathcal{N}(A^*)^\perp. \end{aligned}$$

- **(Teorema 13.4, (LIMA, 2003))** Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $A : E \to E$, os autovetores correspondentes $v_1, \ldots, v_m$ são dois a dois ortogonais.

- **(Teorema Espectral, (LIMA, 2003))** Para todo operador auto-adjunto $A : E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de A.

- **(Critério de Convergência de Cauchy para Sequências)** Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência (a_n) seja convergente é que, qualquer que seja o $\epsilon > 0$, exista $\mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

Equivalentemente: dado $\epsilon > 0$, existe um índice $\mathbb{N}$ tal que, para todo número natural p,

$$n > N \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| < \epsilon.$$

- **(Critério de Cauchy para Séries)** Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\epsilon > 0$, exista um N tal que, para todo inteiro postivo p,

$$n > N \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

- **(Critérios de Compacidade em $\mathbb{R}$)** As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

  1. K é limitado e fechado;
  2. Toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita;
  3. Todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação pertencente a K;
  4. Toda sequência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

- **(Caracterização de Limite de Função por Sequências)** Sejam $X \subset mathbbR$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Para que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que se tenha $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

- **(Caracterização de Continuidade por Sequências)** Para que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

- **(Relação entre Continuidade Uniforme e Sequência de Cauchy)** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, então $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy.

Apesar de inicialmente o aluno apresentar algumas dificuldades pontuais (sendo esta a primeira Iniciação Científica desenvolvida pelo discente), no decorrer do projeto, ele alcançou rapidamente o ritmo de estudo e a compreensão correta sobre os conteúdos apresentados. Logo, entendemos que a primeira etapa foi concluída com êxito.

Os principais resultados estudados pelo discente, sobre o que diz respeito aos tópicos iniciais de Análise Funcional, foram:

- **(Forma Análitica do Teorema de Hahn-Banach)** Seja E um espaço vetorial real e $P : E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\text{e } p(x+y) = p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

  Seja G um subespaço vetorial de E e seja $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional liner tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

  Sob essas hipóteses, existe um funcional linear f definido em todo E que estende g, ou seja, $g(x) = f(x)$, para todo $x \in G$, tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

- **(Proposição 3.1, (BREZIS, 2011))** Seja (x_n) uma sequência em X e seja $\mathcal{P}$ um espaço topológico. Então $x_n \to x$ (em $\mathcal{P}$) se, e somente se, $\phi(x_n) \to \phi(x)$ para todo $i \in I$.

- **(Proposição 3.2, (BREZIS, 2011))** Seja Z um espaço topológico e seja $\varphi : Z \to X$ uma aplicação qualquer. Então ψ é contínua se, e somente se, $\phi \circ \psi$ é contínua de Z em Y_i para todo $i \in I$.

- **(Teorema 3.26, (BREZIS, 2011))** Seja E um espaço de Banach tal que $E^\star$ é separável. Então E é separável.

- **(Teorema 3.29, (BREZIS, 2011))** Seja E um espaço de Banach tal que $E^\star$ é separável. Então B_E é metrizável na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$.

Depois de estudados minuciosamente todos os resultados citados anteriormente, vem sendo observado o excelente progresso do discente em várias frentes. Suas habilidades com o software LATEXsão desenvolvidas e aperfeiçoadas a cada exposição, bem como seu estudo e utilização do português formal. Além disso, como resultância dos conteúdos estudados na Iniciação Científica, o orientando está demonstrando um melhor desempenho tanto em disciplinas ofertadas pela Unidade Acadêmica de Matemática (UAMat), como no grupo de estudo de Análise Real, promovido pelo PET-Matemática-UFCG, Grupo ao qual o aluno faz parte.

CONCLUSÃO

Diante do que foi exposto, concluímos que, além de fortalecer significativamente sua base matemática em Álgebra Linear e Análise Real, o discente aprimorou e exercitou seus conhecimentos em inglês a partir do estudo e leitura das referências (KREYZIG, 1978) e (BREZIS, 2011). Além disso, o aluno teve a oportunidade de lapidar suas habilidades no uso do LaTeX, principal ferramenta utilizada para a produção de material escrito em Matemática. Por fim, também ressaltamos uma mudança positiva na redação matemática e o uso do português formal. Acreditamos que, ao final do projeto, o aluno estará mais preparado para ingressar em uma pós-graduação com foco em Análise Matemática.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu orientador de Iniciação Científica, Prof. Dr. Rodrigo Cohen, por sempre me orientar nesse projeto de maneira sábia, levando-me a conhecer de maneira lucida uma Matemática mais avançada do que já havia conhecido. Ainda mais, sou grato ao Prof. Dr. Daniel Cordeiro, Tutor do PET-Matemática-UFCG, por ter me instruido a começar esta atividade. Por fim, agradeço ao Fundo Nacional de Educação - FNDE, por financiar parcialmente este trabalho por meio da bolsa fornecida para o Grupo PET-Matemática-UFCG, do qual sou integrante.

REFERÊNCIAS

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. United States of America: Springer, 2011. páginas 5, 8

KREYZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: Jhon Wiley Sons, 1978. páginas 5, 8

LANG, S. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003. páginas 5, 6

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. páginas 5

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. páginas 5, 6

ÁVILA, G. S. D. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard blucher LTDA, 2001. páginas 5